正則開集合のブール代数 $RO(X)$ と βX の関係

位相空間 X における正則開集合のなす完備ブール代数 $RO(X)$ と、Stone-Čech コンパクト化 βX は、位相幾何学の「完備化」という共通のテーマで結ばれています。特に、グリーソン被覆を介した関係は、コンパクトハウスドルフ空間の圏における「射影性」の根幹をなします。

1. 正則開集合のブール代数 $RO(X)$

定義：正則開集合
開集合 $U \subset X$ が $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U))$ を満たすとき、U を正則開集合と呼ぶ。

任意の位相空間 X において、正則開集合の全体 $RO(X)$ は以下の演算により**完備ブール代数**を構成します：

結び（OR）: $U \vee V = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V))$
交わり（AND）: $U \wedge V = U \cap V$
補元（NOT）: $\neg U = \mathrm{int}(X \setminus U)$

2. Stone双対性とグリーソン被覆（Gleason Cover）

Stone双対性によれば、完備ブール代数 $RO(X)$ には、それに対応する**極度不連結なストーン空間** $S(RO(X))$ が存在します。これと βX の関係は以下の通りです。

グリーソン被覆の定理

コンパクトハウスドルフ空間 βX に対して、ある極度不連結なコンパクトハウスドルフ空間 G と、既約な全射連続写像 $\pi : G \to \beta X$ が一意に存在します。この G を βX の**グリーソン被覆**と呼びますが、実は次が成り立ちます：

$$G \cong S(RO(X))$$

つまり、**$RO(X)$ のストーン空間は、βX の射影的被覆（Projective Cover）そのもの**なのです。

3. 離散空間 D の場合：最も簡潔な関係

空間 X が離散空間 D であるとき、すべての部分集合は正則開集合です（$RO(D) = \mathcal{P}(D)$）。この場合、関係は非常に直接的になります。

- $RO(D)$ はべき集合代数 $\mathcal{P}(D)$ に一致する。
- $\mathcal{P}(D)$ のストーン空間は、まさに D の Stone-Čech コンパクト化 βD である。

したがって、離散空間においては $S(RO(D)) = \beta D$ となり、βD 自身が極度不連結となります。これが「**CompHaus** 圏において βD は射影的対象である」という事実の背景です。

4. 一般の空間における極度不連結性の「ズレ」

一般の X では、βX が必ずしも極度不連結になるとは限りません。ここが $RO(X)$ との面白い境界線です。

$$\beta X \text{ が極度不連結である} \iff X \text{ が極度不連結（かつ } X \text{ が正規）}$$

もし X が極度不連結なら、$RO(X)$ は X の clopen 集合全体 $\mathrm{Clop}(X)$ と一致しま

す。このときのみ、βX は $RO(X)$ のストーン空間と一致します。そうでない場合、グリーソン被覆 $S(RO(X))$ は βX よりも「さらに細かく、不連結な」空間として、βX の上に君臨することになります。

5. まとめ

正則開集合の代数 $RO(X)$ と Stone-Čech コンパクト化 βX の関係を圏論的に整理すると以下のようになります：

対象	性質・役割
$RO(X)$	X から抽出された「最も純粋な」ブール構造。常に完備。
βX	X の連続関数をすべて保存する最大のコンパクト化。
$S(RO(X))$	βX が射影的になろうとして到達する「究極の姿」（グリーソン被覆）。

つまり、βX は X の**関数的**な完備化であるのに対し、$S(RO(X))$ は X の**論理的（ブール代数的）**な完備化であると言えるでしょう。